

Le système proie-prédateur de Volterra-Lotka

Grégory VIAL

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Description des variables	1
1.2	Mise en équation	1
1.3	But de l'étude	2
2	Problèmes d'existence	2
2.1	Rappels des résultats classiques	2
2.1.1	Existence locale	2
2.1.2	Existence globale	3
2.2	Application au système de Volterra-Lotka	3
3	Comportement au voisinage d'un point d'équilibre	4
3.1	Rappel des résultats classiques	4
3.1.1	Définitions	4
3.1.2	Cas linéaire	5
3.1.3	Cas non-linéaire: méthode de linéarisation	5
3.1.4	Théorème de Lyapunov	6
3.2	Application au système de Volterra-Lotka	6
3.2.1	Étude de l'équilibre $(0, 0)$	6
3.2.2	Étude de l'équilibre $(\frac{c}{a}, \frac{a}{b})$	6
4	Étude globale des solutions	7
4.1	Périodicité des solutions	7
4.2	Moyenne sur une période	9
4.3	Calcul de la période	9
5	Approximation numérique des solutions	11
5.1	Rappels sur les méthodes numériques	11
5.1.1	Construction des méthodes classiques	11
5.1.2	Notions de consistance et de stabilité	12
5.2	Application au système de Volterra-Lotka	13
5.2.1	Visualisation des solutions numériques	13
5.2.2	Étude théorique des schémas dans le cas linéaire	14
5.2.3	Conservation de l'intégrale première par les schémas	15
5.3	Calcul numérique de la période	16
	Annexe: programmes scilab	19
	Références	21

1 Introduction

1.1 Description des variables

On s'intéresse à l'évolution au cours du temps d'un système biologique composé de deux espèces : des proies (lapins, sardines) et des prédateurs (renards, requins, respectivement !). Pour cela, on note $X(t)$ et $Y(t)$ le nombre de proies et de prédateurs au temps t . Les quantités X, Y sont donc des fonctions de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{N} . Afin de disposer d'outils mathématiques, on préfère travailler avec des variables continues. C'est pourquoi on considère deux nouvelles quantités :

$$x(t) = \frac{X(t)}{X_0} \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{Y(t)}{Y_0}$$

où X_0 (respectivement Y_0) est un nombre de proies (respectivement de prédateurs) fixé et grand. Les quantités x et y sont donc des proportions de proies et prédateurs. Les variations de $x(t)$ et $y(t)$ sont donc des quantités petites, si bien que l'on peut faire l'hypothèse que $x(t)$ et $y(t)$ sont des fonctions de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} .

Les nombres X_0 et Y_0 sont choisis suffisamment grands pour que les variations de $X(t)$ et $Y(t)$ soient comparativement petites. Cela permet de supposer les fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ continues.

Enfin, considérons les taux de variation sur un intervalle Δt :

$$\frac{\Delta x(t)}{x(t)} = \frac{\Delta X(t)}{X(t)}$$

Si on suppose que les variations de $X(t)$ sont petites par rapport à $X(t)$ (ce qui paraît vraisemblable seulement pour des populations nombreuses), on peut passer à la limite :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x(t)}{x(t)} = \frac{x'(t)}{x(t)}$$

1.2 Mise en équation

En l'absence de prédateurs, les proies ont un taux de croissance constant (on suppose la nourriture abondante et l'absence de compétition) :

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = a$$

De même, les prédateurs ont tendance à disparaître en l'absence de proies, faute de nourriture

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = -c$$

Il reste à prendre en compte les interactions entre les deux espèces : le taux de prédation (taux de décroissance des proies dû aux prédateurs) est supposé proportionnel au nombre de prédateurs. De la même façon, le taux de variation du nombre de prédateurs est proportionnel à la quantité de nourriture à leur disposition, c'est-à-dire au nombre de proies. Ces considérations nous conduisent aux équations suivantes :

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = a - by \quad \text{et} \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = -c + dx \quad (a, b, c, d > 0)$$

Du point de vue mathématique, il s'agit d'un système de deux équations différentielles, auquel on ajoute des conditions initiales (population de départ de chacune des espèces) :

$$(1) \quad \begin{cases} x' &= x(a - by) \\ y' &= y(-c + dx) \end{cases} \quad (x(0), y(0)) = (x_0, y_0), \quad x_0, y_0 > 0$$

Ce système est appelé *système de Volterra-Lotka*. Pour plus de détails sur la modélisation, voir [6].

1.3 But de l'étude

On désire obtenir des informations sur les solutions du système (1), c'est-à-dire connaître l'évolution des quantités x et y au cours du temps : est-ce que $x(t)$ et $y(t)$ restent des quantités positives au cours du temps, est-ce qu'une des deux populations s'éteint en temps fini, en temps infini, etc. ? Il est important que le modèle soit fidèle aux observations faites dans la nature afin d'être utile dans un but prédictif.

Comme on se sait pas calculer de solution exacte à l'aide d'une formule analytique, on est contraint d'étudier le système différentiel (1) de manière qualitative.

2 Problèmes d'existence

On rappelle dans ce paragraphe les résultats classiques concernant l'existence de solutions pour les systèmes différentiels autonomes. Pour les démonstrations, voir par exemple [7], [3], [2].

2.1 Rappels des résultats classiques

Soit un système différentiel autonome

$$(2) \quad \begin{cases} u'(t) &= f(u(t)) \\ u(0) &= u_0 \end{cases}$$

où $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $u_0 \in \Omega$.

2.1.1 Existence locale

Théorème 2.1 (Cauchy-Lipschitz) *Si f est localement lipschitzienne, alors il existe une unique solution maximale $u \in \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^n)$ de (2) pour $t < T$.*

La démonstration de ce théorème repose sur le théorème du point fixe contractant (donc le résultat est encore vrai en dimension infinie). Si on affaiblit la régularité de f , le résultat ne persiste pas : si f est seulement supposée continue, on conserve l'existence (théorème de Cauchy-Péano), mais on perd l'unicité.

Définition 2.1 *On appelle trajectoire partant de u_0 l'ensemble*

$$\mathcal{T}_{u_0} = \{u(t) / t > 0\}$$

où $u(t)$ est la solution maximale correspondant à la condition initiale $u(0) = u_0$.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz entraîne le résultat suivant :

Corollaire 2.2 *Si $u_0 \neq u_1$, alors les trajectoires \mathcal{T}_{u_0} et \mathcal{T}_{u_1} sont disjointes.*

2.1.2 Existence globale

On se place dans le cadre d'application du théorème de Cauchy-Lipschitz. Le résultat suivant donne une condition suffisante pour que $T = +\infty$:

Théorème 2.3 *Soit u la solution maximale de (2) définie pour $t < T$. Si u est bornée sur $[0, T)$, alors $T = +\infty$.*

La démonstration utilise la caractérisation des compacts en dimension finie, on ne peut donc pas généraliser en dimension infinie. Il est possible d'améliorer ce résultat (voir [7]), mais cette version nous sera amplement suffisante.

2.2 Application au système de Volterra-Lotka

En posant $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, le système (1) devient

$$\begin{cases} u'(t) = f(u(t)) \\ u(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{avec } f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(a - by) \\ y(-c + dx) \end{pmatrix}$$

La fonction f est de classe \mathcal{C}^1 donc localement lipschitzienne. Par application du théorème de Cauchy-Lipschitz, l'existence locale est assurée. De plus, on peut déduire la positivité des solutions :

Proposition 2.4 *Si $x_0 = 0$, alors pour tout $t < T$, $x(t) = 0$.*

En outre, s'il existe $t_0 < T$ tel que $x(t_0) = 0$, alors $\forall t \in [0, T)$, $x(t) = 0$.

Enfin, si $x_0 > 0$, alors pour tout $t > 0$, $x(t) > 0$.

De même pour y .

DÉMONSTRATION. Si $x_0 = 0$, alors la solution $(0, y_0 e^{-ct})$ convient. Par unicité, $x(t) = 0$ pour tout temps d'existence.

On voit ainsi que les ensembles de la forme $\{0\} \times [y_0, +\infty)$ sont des trajectoires. S'il existe $t_0 < T$ tel que $x(t_0) = 0$, alors la trajectoire associée coupe l'axe des ordonnées, ce qui est interdit par le corollaire 2.2.

Enfin, si $x_0 > 0$ et que $x(t_0) < 0$, alors x s'annule d'après le théorème des valeurs intermédiaires, ce qui est impossible. ■

Pour l'existence globale, on utilise la

Proposition 2.5 *Soit $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie pour $x, y > 0$ par*

$$H(x, y) = dx - c \ln x + by - a \ln y$$

Alors H est une intégrale première pour le système (1), ie si $(x(t), y(t))$ est solution de (1) sur $[0, T)$, alors

$$\forall t < T, H(x(t), y(t)) = \text{cste}$$

DÉMONSTRATION. On effectue le calcul formel suivant :

$$\frac{x'}{y'} = \frac{x(a - by)}{y(-c + dx)}$$

qui devient, après séparation des variables

$$\frac{x'(-c + dx)}{x} = \frac{y'(a - by)}{y}$$

soit

$$-c\frac{x'}{x} + dx' = a\frac{y'}{y} - by'$$

et donc

$$-c \ln x + dx = a \ln y - by + \text{cste}$$

Et plutôt que de justifier qu'on a le droit de le faire, on s'assure que $H(x(t), y(t))$ est bien défini (cf proposition 2.4) et on vérifie que $\frac{\partial}{\partial t} H(x(t), y(t)) = 0$ en utilisant les équations (1) ! ■

La connaissance de cette intégrale première nous permet de montrer le

Lemme 2.6 *La solution maximale $(x(t), y(t))$ est bornée.*

DÉMONSTRATION. Cela provient de la coercivité de l'intégrale première. Il existe $A > 0$ et $B > 0$ tels que

$$\forall x > A, c \ln x < \frac{dx}{2} \quad \text{et} \quad \forall y > B, a \ln y < \frac{by}{2}$$

Ainsi, si (x, y) est en dehors du compact $[-A, A] \times [-B, B]$,

$$H(x, y) > \frac{dx + by}{2}$$

On en déduit que

$$0 < x(t) < \max \left\{ A, \frac{2}{d} H(x_0, y_0) \right\} \quad \text{et} \quad 0 < y(t) < \max \left\{ B, \frac{2}{b} H(x_0, y_0) \right\}$$

d'où le résultat. ■

On déduit du lemme précédent et du théorème 2.3 que les solutions maximales $x(t), y(t)$ du système de Volterra-Lotka sont définies pour tout $t > 0$.

3 Comportement au voisinage d'un point d'équilibre

3.1 Rappel des résultats classiques

On considère le problème de Cauchy (2) pour lequel on suppose existence globale.

3.1.1 Définitions

Définition 3.1 $\bar{u} \in \mathbb{R}^n$ est un point d'équilibre (ou stationnaire) ssi $f(\bar{u}) = 0$.

Définition 3.2 Soit $\bar{u} \in \mathbb{R}^n$ un point d'équilibre. \bar{u} est stable ssi

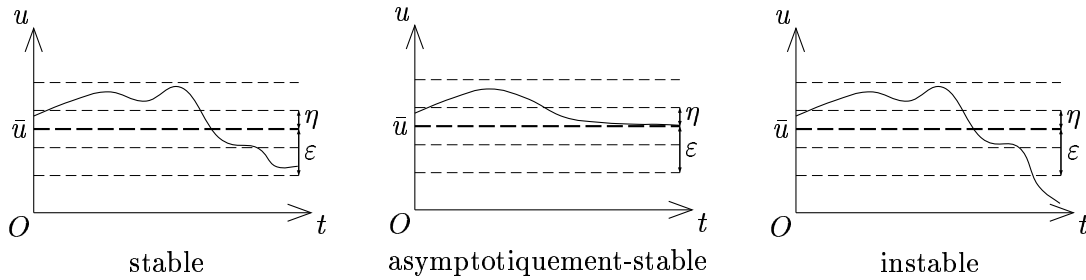
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0, \|u_0 - \bar{u}\| < \eta \implies \forall t > 0, \|u(t) - \bar{u}\| < \varepsilon$$

Si, de plus,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t) - \bar{u}\| = 0$$

le point \bar{u} est dit asymptotiquement stable.

Les dessins qui suivent illustrent les notions qui viennent d'être introduites :



3.1.2 Cas linéaire

On suppose que f est linéaire, c'est-à-dire que le système différentiel (2) est de la forme :

$$(3) \quad \begin{cases} u'(t) = Au(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad \text{avec } A \in M_n(\mathbb{R})$$

On s'intéresse au point d'équilibre 0 ($\mathfrak{S}(A)$ désigne le spectre de A) :

Théorème 3.1 *Pour le système (3),*

- 0 est asymptotiquement stable ssi $\forall \lambda \in \mathfrak{S}(A), \operatorname{Re} \lambda < 0$.
- 0 est stable ssi
 - $\forall \lambda \in \mathfrak{S}(A), \operatorname{Re} \lambda \leq 0$
 - $\forall \lambda \in \mathfrak{S}(A), (\operatorname{Re} \lambda = 0 \implies \lambda \text{ n'est pas défective.})$

On rappelle qu'une valeur propre λ non défective correspond à un bloc de Jordan de taille 1, c'est-à-dire

$$\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I) = n, \quad \text{où } n \text{ est la multiplicité de } \lambda \text{ dans } \chi_A = \det(XI - A).$$

Le théorème précédent fournit donc une condition nécessaire et suffisante de stabilité (et de stabilité asymptotique) dans le cas d'un système différentiel linéaire. La démonstration, basée sur la décomposition de Jordan figure dans [5] et [1].

3.1.3 Cas non-linéaire : méthode de linéarisation

Pour simplifier les notations, on suppose que $f(0) = 0$ et on s'intéresse à ce point d'équilibre. On fait également l'hypothèse que f est différentiable en 0. Au voisinage du point d'équilibre, le système (2) est «proche» du système linéaire

$$(4) \quad \begin{cases} u'(t) = Df(0)u(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

On pourrait s'attendre à ce que le comportement de (2), au voisinage de l'équilibre 0, soit semblable à celui de (4), mais ce n'est pas toujours le cas :

Théorème 3.2 (linéarisation) *Si f est différentiable en 0 et $f(0) = 0$, alors*

- Si $\forall \lambda \in \mathfrak{S}(Df(0)), \operatorname{Re} \lambda < 0$, alors 0 est asymptotiquement stable pour (2).
- Si $\exists \lambda \in \mathfrak{S}(Df(0)), \operatorname{Re} \lambda > 0$, alors 0 est instable pour (2).

On ne sait donc rien dire du comportement au voisinage d'un point d'équilibre si toutes les valeurs propres de la différentielle sont de partie réelle nulle, même si on peut conclure pour le système linéarisé (4).

On trouvera la démonstration de ce résultat dans [5] et [1].

3.1.4 Théorème de Lyapunov

On considère toujours $f(0) = 0$ et on regarde le point d'équilibre 0.

Définition 3.3 Soient U un voisinage de 0 dans Ω et $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et différentiable sur $U \setminus \{0\}$ telle que

- $V(0) = 0$ et $\forall u \neq 0, V(u) > 0$.
- $\dot{V}(u) := \langle f(u); \nabla V(u) \rangle \leq 0, \forall u \in U \setminus \{0\}$.

On appelle une telle fonction fonction de Lyapunov.

L'utilité des fonctions de Lyapunov réside dans le résultat suivant :

Théorème 3.3 (Lyapunov) *S'il existe une fonction de Lyapunov pour (2), alors l'équilibre 0 est stable.*

Le théorème précédent ne fournit qu'une condition suffisante, mais permet souvent de conclure quand la méthode de linéarisation ne s'applique pas. Pour la démonstration (et des compléments) on renvoie à [5] ou [1].

3.2 Application au système de Volterra-Lotka

Les deux points d'équilibre du système (1) sont

$$(x, y) = (0, 0) \quad \text{et} \quad (x, y) = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b} \right)$$

3.2.1 Étude de l'équilibre (0, 0)

La fonction f est différentiable en $(0, 0)$ et

$$Df(0, 0) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{bmatrix}$$

Une valeur propre est de partie réelle a strictement positive, le théorème 3.2 s'applique et l'équilibre $(0, 0)$ est instable. On peut même affiner le résultat et dire que la direction x est instable alors que la direction y est asymptotiquement stable.

3.2.2 Étude de l'équilibre $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$

On peut encore calculer la différentielle :

$$Df\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{bc}{d} \\ \frac{ad}{b} & 0 \end{bmatrix}$$

Si bien que ses valeurs propres sont $\pm i\sqrt{ac}$: toutes deux imaginaires pures. Le principe de linéarisation ne s'applique pas. Cependant la fonction

$$V(x, y) = H(x, y) - H\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$$

est une fonction de Lyapunov (H est l'intégrale première du système (1)). En effet

$$\dot{V}(x, y) = \langle f(u); \nabla V(u) \rangle = 0$$

et $V(x, y) \geq 0$, nul seulement pour $(x, y) = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$. Par application du théorème (3.3), on conclut que l'équilibre $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$ est stable.

4 Étude globale des solutions

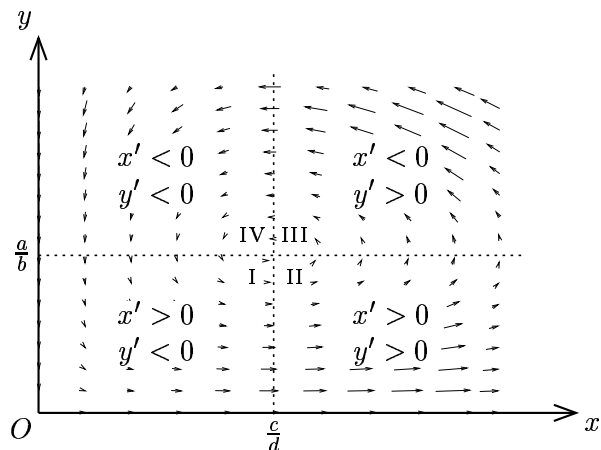
4.1 Périodicité des solutions

Le système linéarisé autour du point d'équilibre $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ admet pour trajectoires des ellipses centrées en ce point. On ne peut pas en déduire que le système (1) admet des trajectoires proches d'ellipses au voisinage du point d'équilibre, ni même qu'elles sont périodiques. Cependant le résultat est vrai, et pas seulement autour de $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$, comme le montre le théorème suivant :

Théorème 4.1 *Les solutions du système de Volterra-Lotka sont périodiques.*

DÉMONSTRATION. On a dessiné ci-contre le champ des vitesses pour le système de Volterra-Lotka. Ce dernier fait apparaître quatre zones, notées I, II, III et IV, dans lesquelles x et y sont monotones.

Notre technique de démonstration consiste à suivre une trajectoire au travers de ces zones pour montrer qu'elle est périodique.



Soit donc (x_0, y_0) le point initial, qu'on suppose – sans perte de généralité – dans la zone I. On note $(x(t), y(t))$ la solution de (1) qui part de (x_0, y_0) .

Étape 1. La solution parcourt les quatre zones successivement.

- il existe $t_1 > 0$ à partir duquel $M(t) = (x(t), y(t))$ rentre dans II.

En effet si $M(t)$ reste dans I pour tout temps, alors x et y sont bornés. Comme ils sont monotones, ils convergent tous-deux vers des limites respectives x_∞, y_∞ . D'après (1), on en déduit que x' et y' convergent aussi; leur limite ne peut être que 0: en effet si x' tend vers $\ell \neq 0$, alors x est équivalent à ℓt , donc ne peut converger. En conséquence, toujours grâce à (1), (x_∞, y_∞) est un point stationnaire.

Or, comme x croît, $x_\infty > 0$ et, puisque y décroît, $y_\infty < \frac{a}{b}$. On aboutit donc à une contradiction, puisque les deux seuls points stationnaires sont $(0, 0)$ et $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$.

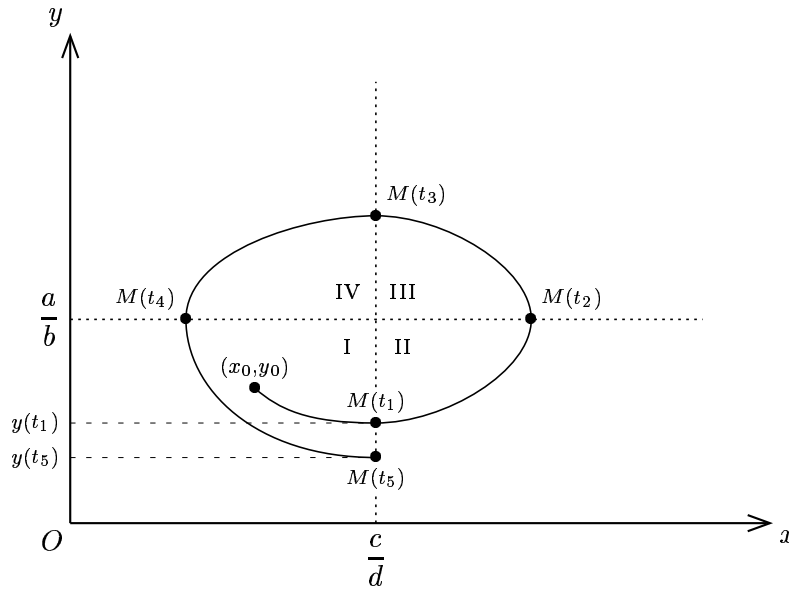
Ainsi, $M(t)$ sort de la zone I. C'est, bien-sûr, dans la zone II qu'elle entre, puisque y décroît.

- il existe $t_2 > t_1$ à partir duquel $M(t)$ rentre dans III.

Ici encore x et y sont monotones et bornées (attention, dans cette zone, il faut invoquer le lemme 2.6). Par le même raisonnement qu'à l'étape précédente, on prouve l'existence d'un instant $t_2 > t_1$ à partir duquel $M(t)$ quitte la zone II pour la zone III.

Les points suivants se démontrent de même :

- il existe $t_3 > t_2$ à partir duquel $M(t)$ rentre dans IV.
- il existe $t_4 > t_3$ à partir duquel $M(t)$ rentre dans I.
- il existe $t_5 > t_4$ à partir duquel $M(t)$ rentre dans II.



Étape 2. Les points $M(t_1)$ et $M(t_5)$ sont confondus.

Par définition, on a déjà $x(t_1) = x(t_5) = \frac{c}{d}$. De plus, comme ce sont des points d'une même trajectoire,

$$H(x(t_1), y(t_1)) = H(x(t_5), y(t_5))$$

On en déduit que

$$h(y(t_1)) = h(y(t_5)) \quad \text{avec } h(y) = by - a \ln y$$

Or $y(t_1) < \frac{a}{b}$, $y(t_5) < \frac{a}{b}$ et h est injective sur $(0, \frac{a}{b})$. Donc $y(t_1) = y(t_5)$.

Étape 3. Les solutions sont périodiques

Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$\tilde{x}(t) = x(t_5 + t) \quad \text{et} \quad \tilde{y}(t) = y(t_5 + t)$$

et

$$\bar{x}(t) = x(t_1 + t) \quad \text{et} \quad \bar{y}(t) = y(t_1 + t)$$

Alors (\tilde{x}, \tilde{y}) et (\bar{x}, \bar{y}) vérifient le même problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x' = x(a - by) \\ y' = y(-c + dx) \end{cases} \quad (x(0), y(0)) = (x_1, y_1)$$

où $x_1 = \tilde{x}(0) = \bar{x}(0) = x(t_1) = \frac{c}{d}$ et $y_1 = \tilde{y}(0) = y(t_5) = y(t_1) = \bar{y}(0)$ d'après l'étape précédente.

Le théorème de Cauchy Lipschitz conclut à l'égalité de (\tilde{x}, \tilde{y}) et (\bar{x}, \bar{y}) . Donc

$$\forall s \in \mathbb{R}, M(t_5 - t_1 + s) = M(s)$$

Donc la solution est périodique, de période $t_5 - t_1$. ■

Remarque 4.2 *Le caractère autonome du système différentiel (1) est essentiel. Dans le cas contraire, le deuxième «tour» peut être effectué à une vitesse différente du premier, si bien que les solutions ne sont pas périodiques alors que les trajectoires sont des courbes fermées.*

Pour prouver le théorème 4.1, on peut montrer dans un premier temps que les trajectoires sont des courbes fermées (il s'agit d'étudier la géométrie des lignes de niveau de H). Ensuite on utilisera une argumentation voisine de celle décrite plus haut, pour conclure à la périodicité des solutions.

4.2 Moyenne sur une période

On définit les moyennes de x et y sur une période $[0, T]$ comme

$$\langle x \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad \text{et} \quad \langle y \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt$$

Proposition 4.3 On a $\langle x \rangle = \frac{c}{d}$ et $\langle y \rangle = \frac{a}{b}$.

DÉMONSTRATION. D'après les équations (1), $\frac{x'(t)}{x(t)} = a - by(t)$.

donc

$$\langle y \rangle = \frac{a}{b} - \frac{1}{b} \int_0^T [a - by(t)] dt = \frac{a}{b} - \frac{1}{b} \int_0^T \frac{x'(t)}{x(t)} dt = \frac{a}{b} - \frac{1}{b} [\ln x(t)]_0^T = \frac{a}{b}$$

On procède de même pour le calcul de $\langle x \rangle$. ■

Si, dans le modèle de Volterra-Lotka, on ajoute un prédateur commun aux deux espèces (chasse ou pêche), on transforme (1) en

$$\begin{cases} x' &= x(a - by) - ex \\ y' &= y(-c + dx) - fy \end{cases} \iff \begin{cases} x' &= x(\tilde{a} - by) \\ y' &= y(-\tilde{c} + dx) \end{cases}$$

avec $\tilde{a} = a - e$ et $\tilde{c} = c + f$. On retrouve donc un système du type Volterra-Lotka. Les moyennes de x et y sur une période sont donc

$$\langle x \rangle = \frac{\tilde{c}}{d} \quad \text{et} \quad \langle y \rangle = \frac{\tilde{a}}{b}$$

Ainsi, la moyenne des proies augmente alors que la moyenne des prédateurs diminue. Ce résultat a été observé dans la mer adriatique pendant la guerre : de nombreux pêcheurs étant partis combattre, on a vu la population de sardines baisser, prouvant ainsi que la pêche leur profite...

4.3 Calcul de la période

Si on effectue le changement de fonction inconnue

$$p(t) = \ln \left[\frac{c}{d} x(t) \right] \quad \text{et} \quad q(t) = \ln \left[\frac{a}{b} y(t) \right]$$

alors le système (1) devient :

$$\begin{cases} p' &= a(1 - e^q) \\ q' &= -c(1 - e^p) \end{cases}$$

si bien qu'en posant $G(p, q) = a(q - e^q) + c(p - e^p)$, il se met sous la forme

$$(5) \quad \begin{cases} p' &= \partial_q G(p, q) \\ q' &= -\partial_p G(p, q) \end{cases}$$

un tel système est dit *hamiltonien*.

Le point d'équilibre correspondant à $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ est $(p_0, q_0) = (0, 0)$.

Théorème 4.4 On pose $F(r, \theta) = G(r \cos \theta, r \sin \theta) - G(p_0, q_0)$. Alors la période de (p, q) est donnée par

$$\mathcal{T} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\mathcal{F}(\theta)} \quad \text{avec} \quad \mathcal{F}(\theta) = \frac{\partial_r F(g(\theta), \theta)}{g(\theta)}$$

où la fonction g est définie implicitement par $F(g(\theta), \theta) = 0$.

DÉMONSTRATION.

Étape 1. g est bien définie

Il suffit d'appliquer le théorème des fonctions implicites, après avoir vérifié que

$$F(r, \theta) = 0 \implies \partial_r F(r, \theta) \neq 0$$

Soit $(r, \theta) \neq 0$ tel que $F(r, \theta) = 0$; on pose $p = r \cos \theta$ et $q = r \sin \theta$.

Alors $\exists t$, $(p, q) = (p(t), q(t))$. D'autre part,

$$\begin{aligned} \partial_r F(r, \theta) &= \cos \theta \partial_p G(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta \partial_q G(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ &= \frac{1}{r(t)} \left(q(t)p'(t) - p(t)q'(t) \right) \end{aligned}$$

où on a posé $r^2(t) = p^2(t) + q^2(t)$. Ainsi $\partial_r F(r, \theta) = 0$ signifie

$$af(q) + cf(p) = 0 \quad \text{avec} \quad f(x) = x(1 - e^x)$$

Comme f est strictement positive sur \mathbb{R}^* , nulle en 0, l'équation précédente n'a pas de solutions $(p, q) \neq (0, 0)$ donc $\partial_r F(r, \theta) = 0$ et le théorème des fonctions implicites s'applique.

Étape 2. $\theta' = \mathcal{F} \circ \theta$

On dérive $p(t)$ et $q(t)$:

$$\begin{aligned} p'(t) &= r'(t) \cos(\theta(t)) - r(t) \sin(\theta(t))\theta'(t) \\ q'(t) &= r'(t) \sin(\theta(t)) + r(t) \cos(\theta(t))\theta'(t) \end{aligned}$$

En multipliant la première égalité par $\sin(\theta(t))$, la seconde par $\cos(\theta(t))$ et en ajoutant, on obtient :

$$\frac{1}{r(t)} \left(q(t)p'(t) - p(t)q'(t) \right) = r(t)\theta'(t)$$

d'où le résultat car $g(\theta(t)) = r(t)$.

Étape 3. Conclusion

Soit t_0 tel que $\theta(t_0) = 0$, alors $\theta(t + \mathcal{T}) = 2\pi$. Le changement de variable $t = t(\theta)$ est admissible (car strictement croissant) :

$$\mathcal{T} = \int_{t_0}^{t_0 + \mathcal{T}} dt = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\theta'(t(\theta))} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\mathcal{F}(\theta)} \quad \blacksquare$$

On verra au paragraphe 5.3 comment utiliser la formule du théorème précédent pour calculer numériquement la période.

5 Approximation numérique des solutions

5.1 Rappels sur les méthodes numériques

L'objet de ce paragraphe est de présenter brièvement les méthodes simples les plus utilisées pour la résolution numérique des équations différentielles ordinaires. On renvoie à [2], [3] ou [4] pour une description détaillée.

5.1.1 Construction des méthodes classiques

On désire approcher la solution du problème de Cauchy (2) :

$$\begin{cases} u'(t) &= f(u(t)), t > 0 \\ u(0) &= u_0 \end{cases}$$

On suppose que la fonction f est lipschitzienne. Afin de construire une solution numérique sur l'intervalle $[0, T]$, on introduit une subdivision

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$$

de pas $h_n = t_{n+1} - t_n$. Notre but est de trouver une suite $(u_n)_{0 \leq n \leq N}$ telle que u_n soit une approximation de $u(t_n)$. Toutes les méthodes présentées ici sont des *méthodes de Runge-Kutta* ; leur point de départ est la formule suivante :

$$u(t_{n+1}) = u(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} u'(t) dt = u(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(t)) dt$$

Il suffit ensuite d'utiliser une formule d'intégration numérique pour approcher l'intégrale précédente :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(t)) dt \simeq I(f \circ u, t_n, t_{n+1})$$

La méthode des rectangles à gauche s'écrit

$$I(f \circ u, t_n, t_{n+1}) = h_n f(u(t_n))$$

ce qui conduit à définir la suite (u_n) par récurrence :

$$u_{n+1} = u_n + h_n f(u_n)$$

Cette méthode est appelée la *méthode d'Euler explicite*. De la même façon, la formule des rectangles à droite fournit la *méthode d'Euler implicite* :

$$u_{n+1} = u_n + h_n f(u_{n+1})$$

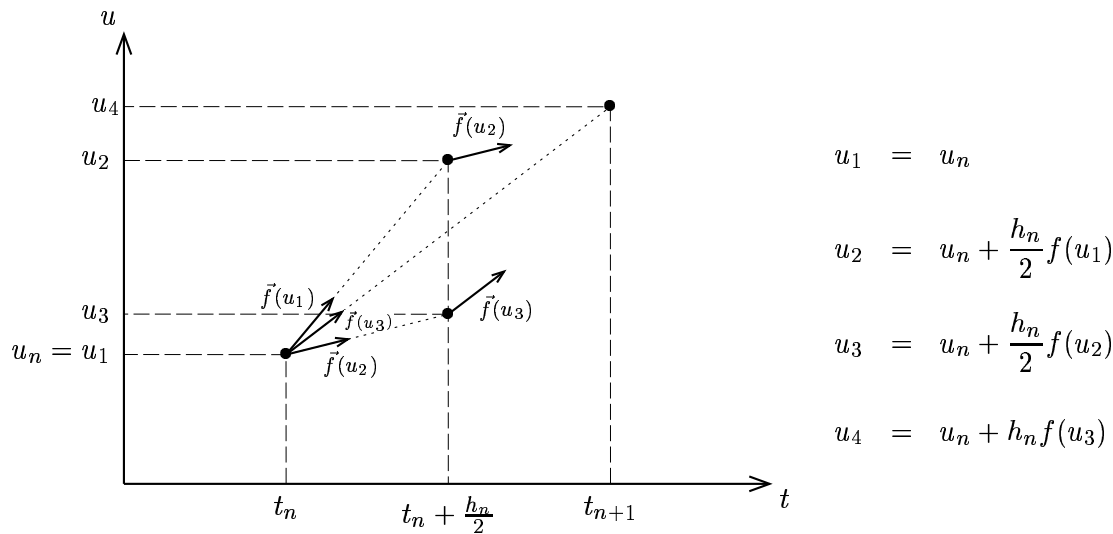
La formule des trapèzes, quant à elle, est à l'origine de la *méthode de Crank-Nicolson* :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h_n}{2} (f(u_n) + f(u_{n+1}))$$

Enfin, on peut utiliser la formule de Simpson :

$$I(f(u(\cdot)), t_n, t_{n+1}) = \frac{h_n}{6} \left(f(u(t_n)) + 4f\left(u\left(t_n + \frac{h_n}{2}\right)\right) + f(u(t_{n+1})) \right)$$

Mais il faut alors approcher $u\left(t_n + \frac{h_n}{2}\right)$. Une technique classique consiste à effectuer les approximations suivantes :



On définit alors u_{n+1} comme

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h_n}{6} \left(f(u_1) + 2f(u_2) + 2f(u_3) + f(u_4) \right)$$

On vient de décrire la *méthode de Runge-Kutta classique*.

Il est possible de construire une multitude de méthodes en s'appuyant sur des formules de quadrature ; les précédentes figurent parmi les plus utilisées.

Remarque 5.1 Des quatre méthodes décrites dans ce paragraphe, deux sont explicites : il s'agit des méthodes d'Euler explicite et de Runge-Kutta classique. Cela signifie qu'un simple calcul permet de déterminer u_{n+1} à partir de u_n . En revanche les méthodes d'Euler implicite et de Crank-Nicolson nécessitent la résolution d'une équation pour calculer u_{n+1} connaissant u_n . De telles méthodes sont dites implicites.

On verra que les méthodes implicites présentent des avantages de stabilité ; la contrepartie réside dans la résolution d'une équation (le plus souvent non linéaire) à chaque pas. L'utilisation d'une méthode de type Newton est nécessaire.

5.1.2 Notions de consistance et de stabilité

Afin d'étudier la convergence des méthodes numériques, on introduit deux notions :

- la *consistance* mesure la pertinence du schéma par rapport à l'équation différentielle qu'il doit approcher (le mot «cohérence» aurait été une meilleure traduction...);
- la *stabilité* indique qu'une petite perturbation du schéma induira une petite perturbation de la solution numérique.

Plus précisément, on peut écrire tous les schémas du paragraphe précédent sous la forme :

$$u_{n+1} = \Phi_{h_n}(u_n)$$

On définit alors l'erreur de consistance locale ε_n comme l'erreur commise par le schéma sur la solution exacte $u(\cdot)$:

$$\varepsilon_n = u(t_{n+1}) - \Phi_{h_n}(u(t_n))$$

On dit que la méthode est *consistante* d'ordre $p \in \mathbb{N}$ si l'erreur de consistance globale est d'ordre p par rapport à $h = \max_n h_n$:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |\varepsilon_n| = \mathcal{O}(h^p)$$

La stabilité se définit comme suit : soit v_n une suite vérifiant un schéma perturbé :

$$v_{n+1} = \Phi_{h_n}(v_n) + \mu_n$$

On dit qu'il y a stabilité si on peut maîtriser l'erreur commise :

$$\max_{0 \leq n \leq N} |u_n - v_n| \leq c \left(|u_0 - v_0| + \sum_{n=0}^{N-1} |\mu_n| \right)$$

On peut alors écrire de manière simple :

$$\text{CONSISTANCE} + \text{STABILITÉ} \implies \text{CONVERGENCE}$$

En effet, si on prend pour v_n la solution exacte $u(t_n)$, alors $\mu_n = \varepsilon_n$ par définition de l'erreur de consistance. Si on choisit $u_0 = u(0)$ pour initialiser la suite (u_n) , et que la méthode est consistante d'ordre p et stable, alors

$$\max_{0 \leq n \leq N} |u_n - u(t_n)| \leq ch^p$$

ce qui prouve la convergence.

Il est facile de montrer – en utilisant l'inégalité de Lipschitz pour f – que les quatre méthodes du paragraphe 5.1.1 sont stables. Un développement de Taylor donne aisément les ordres de consistance : les méthodes d'Euler sont d'ordre 1, la méthode de Crank-Nicolson d'ordre 2 et la méthode de Runge-Kutta classique d'ordre 4. Cette dernière est donc beaucoup plus précise.

5.2 Application au système de Volterra-Lotka

5.2.1 Visualisation des solutions numériques

On a programmé les quatre méthodes à l'aide du logiciel `scilab` et on les a appliquées au système (1) pour les paramètres suivants :

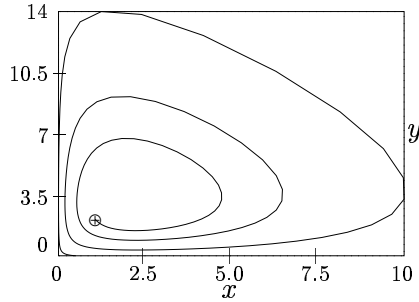
$$a = 3, \quad b = 1, \quad c = 2, \quad d = 1$$

On a fixé la condition initiale à :

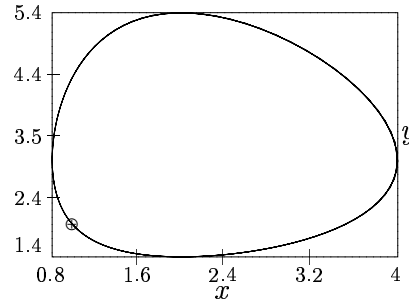
$$x_0 = 1, \quad y_0 = 2$$

On calcule la solution exacte sur l'intervalle $[0, T]$ avec $T = 10$; le pas de discrétisation est constant $h = 0.05$. Les courbes suivantes représentent la solution numérique dans le plan de phase (x, y) – le caractère \oplus repère la condition initiale :

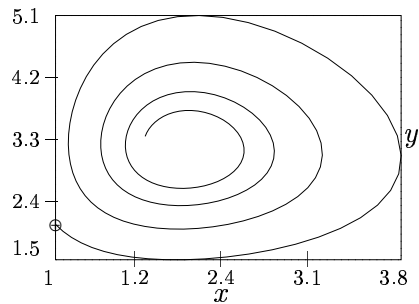
Méthode d'Euler explicite



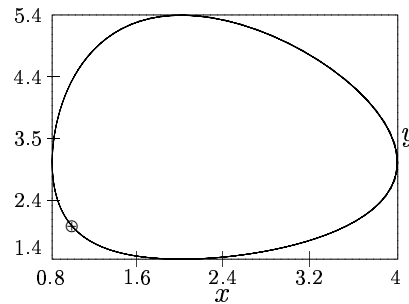
Méthode de Crank-Nicolson



Méthode d'Euler implicite



Méthode de Runge-Kutta



Seules les deux dernières méthodes fournissent une solution apparemment périodique. Les solutions numériques obtenues à l'aide des méthodes d'Euler sont des spirales. L'explication de ces comportements est difficile; le paragraphe suivant se propose d'en faire l'étude dans le cas plus simple d'un système différentiel linéaire.

5.2.2 Étude théorique des schémas dans le cas linéaire

À une affinité près, le linéarisé du système de Volterra-Lotka au voisinage du point d'équilibre intérieur s'écrit :

$$(6) \quad \begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$$

Les trajectoires de (6) sont des cercles d'équation $x^2 + y^2 = c$. Il s'agit de savoir si les schémas numériques conservent cette propriété. Pour cela on calcule $x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2$ en fonction de $x_n^2 + y_n^2$ pour chacun des schémas :

$$\text{Euler explicite: } x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = (1 + h^2)(x_n^2 + y_n^2)$$

$$\text{Euler implicite: } x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = \frac{1}{1 + h^2}(x_n^2 + y_n^2)$$

$$\text{Crank-Nicolson: } x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = x_n^2 + y_n^2$$

$$\text{Runge-Kutta: } x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = \left(1 - \frac{h^6}{72} + \frac{h^8}{576}\right)(x_n^2 + y_n^2)$$

Il apparaît que seule la méthode de Crank-Nicolson conserve l'intégrale première $x^2 + y^2$. La méthode d'Euler explicite augmente sa valeur ($1 + h^2 > 1$) alors que pour la méthode d'Euler implicite le rayon du cercle diminue. Cela explique le comportement en spirale vu au paragraphe précédent (au moins au voisinage de l'équilibre). Enfin la méthode de

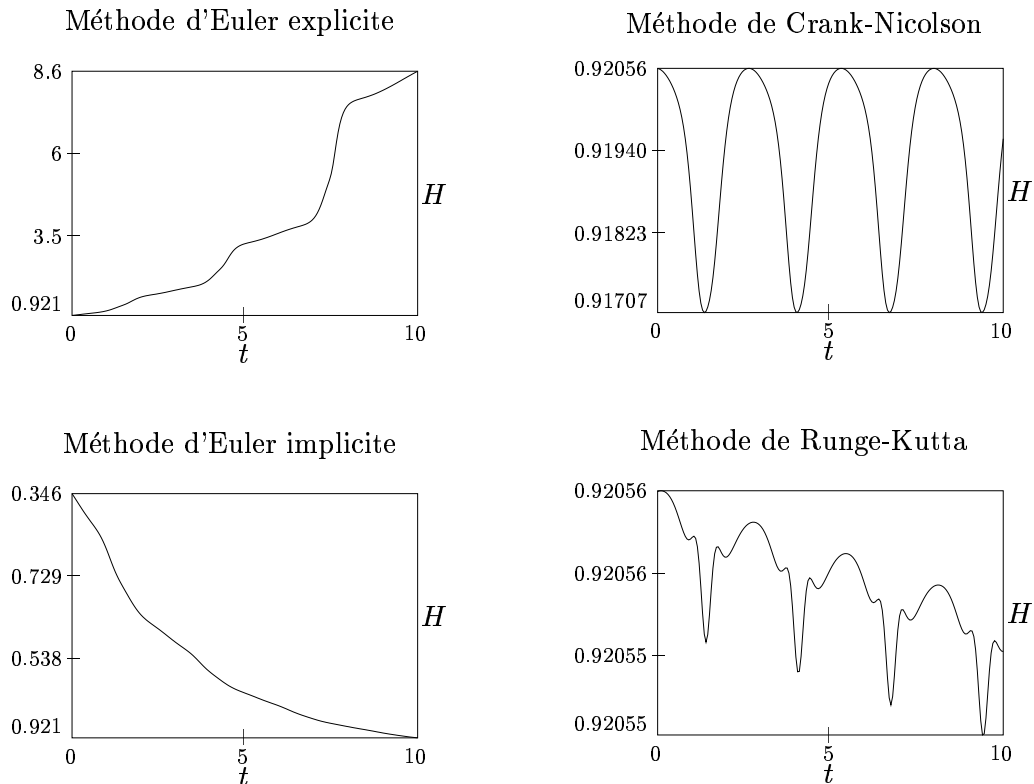
Runge-Kutta ne conserve pas l'intégrale première, mais le coefficient multiplicateur est très proche de 1, donc on observe numériquement une solution périodique, tant que T n'est pas trop grand.

La méthode de Crank-Nicolson est dite *symplectique* (pour plus de détails, voir [4]).

5.2.3 Conservation de l'intégrale première par les schémas

Dans le paragraphe précédent, on a étudié la conservation de l'intégrale première par les schémas numériques dans le cas linéaire. On veut maintenant comprendre ce qu'il se passe dans le cas non linéaire du système de Volterra-Lotka.

Les figures suivantes représentent l'évolution de l'intégrale première H au cours du temps :

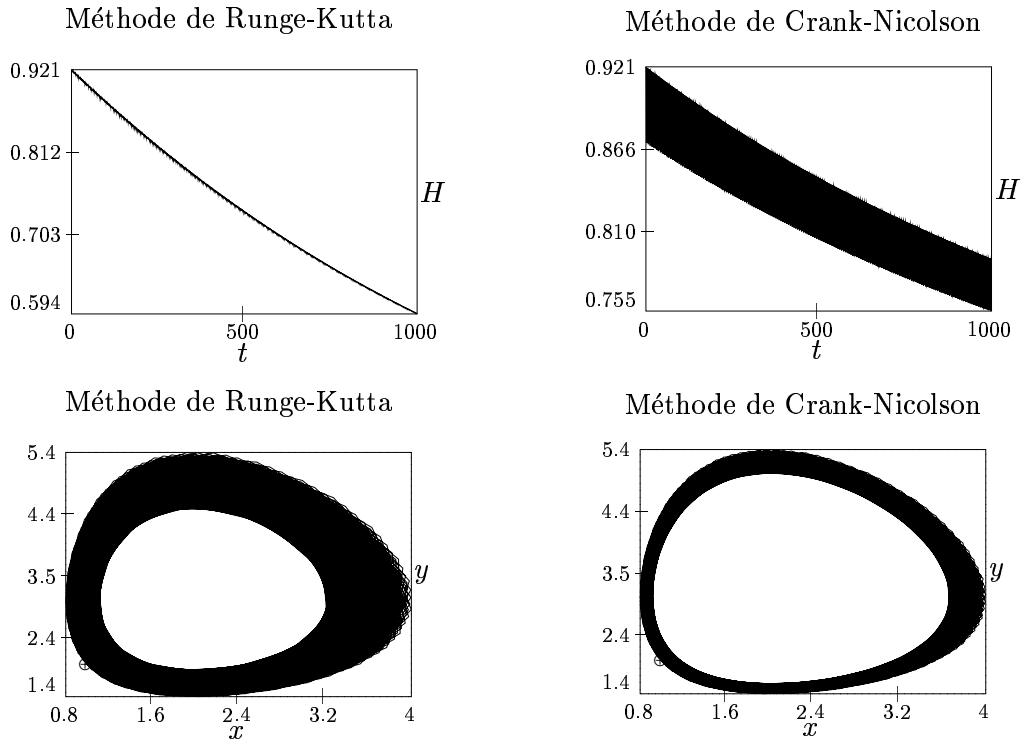


On observe bien que l'intégrale première décroît au cours du temps pour les méthodes d'Euler implicite et de Runge-Kutta – pour cette dernière, la décroissance est faible. La méthode d'Euler explicite augmente l'intégrale première, ce qu'on avait déjà constaté dans le cas linéaire.

Enfin H semble périodique pour la méthode de Crank-Nicolson. Il n'y a donc pas conservation de l'intégrale première, contrairement au cas linéaire. On peut montrer que les méthodes symplectiques conservent les intégrales premières quadratiques, et que l'hamiltonien reste compris entre deux bornes fixées pour tout temps dans le cas général (pour plus de détails, voir [4]).

En conclusion l'utilisation d'un schéma fidèle aux propriétés qualitatives de l'équation différentielle est nécessaire. Dans le cas du système de Volterra-Lotka, on a le choix entre une méthode symplectique (Crank-Nicolson, mais aussi Euler symplectique, schéma du point milieu, voir [4]) ou une méthode d'ordre élevé. Si le premier choix est préférable car la propriété de périodicité sera mieux conservée, une méthode d'ordre élevé (par exemple

Runge-Kutta classique) altère lentement la périodicité de la solution numérique quand le temps T devient grand :



Les figures ci-dessus ont été obtenues pour $h = 0.2$ et $T = 1000$. Même si la méthode de Crank-Nicolson ne conserve pas parfaitement le caractère périodique de la solution (le pas est trop grossier vis-à-vis du temps T), elle fournit une meilleure approximation que la méthode de Runge-Kutta.

5.3 Calcul numérique de la période

Compte-tenu des difficultés à approcher convenablement la solution à l'aide d'une méthode numérique, on renonce à utiliser la solution calculée pour estimer la période (certaines méthodes ne conservent même pas le caractère périodique, voir § 5.2.1).

Afin de calculer la période de la solution de (1), on utilise le résultat démontré au paragraphe 4.3 :

$$\mathcal{T} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\mathcal{F}(\theta)}$$

La fonction \mathcal{F} est 2π -périodique; on utilise donc la méthode des trapèzes pour le calcul de l'intégrale définissant T . La raison de ce choix réside dans le résultat suivant :

Théorème 5.2 *Soit f une fonction \mathcal{T} -périodique sur \mathbb{R} . On suppose que $f \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R})$ et on note $T_h(f)$ l'approximation obtenue par la méthode des trapèzes de pas h pour le calcul de l'intégrale de f sur $[0, \mathcal{T}]$, alors il existe une constante c_m telle que*

$$\left| \int_0^{\mathcal{T}} f(t)dt - T_h(f) \right| \leq c_m h^m$$

Ce résultat prouve que l'ordre de convergence de la méthode des trapèzes pour les fonctions périodiques est lié à la régularité de la fonction à intégrer. C'est tout-à-fait remarquable car dans le cas général, la convergence est en h^2 dès que la fonction à intégrer est de classe

\mathcal{C}^2 , mais ne s'améliore pas.

La démonstration, basée sur la formule d'Euler-Mac Laurin, figure dans [2]. Notons qu'on a le même résultat pour la méthode des rectangles, mais pas pour la méthode de Simpson.

Dans notre exemple, la fonction \mathcal{F} est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} donc la convergence est sur-linéaire. D'un point de vue pratique, il faut pouvoir évaluer la fonction \mathcal{F} en un point θ donné. Or elle fait intervenir g définie implicitement par

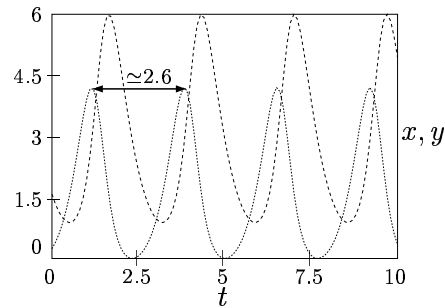
$$F(g(\theta), \theta) = 0$$

À θ fixé, il s'agit donc de résoudre l'équation non-linéaire $F(r, \theta) = 0$, ce qui peut être fait avec la méthode de Newton.

Le calcul à l'aide de la méthode des trapèzes donne

$$\mathcal{T} = 2.6516945$$

ce qui correspond avec la période observée sur la solution numérique obtenue avec le schéma de Crank-Nicolson (voir figure ci-contre).



Annexe : programmes scilab

On a regroupé ici les procédures `scilab` utilisées pour les simulations du document :

<pre> //// Methode d'Euler explicite //// function yy=eulE(y0,dt,T); y=y0; yy=y; N=floor(T/dt); for i=1:N, y=y+dt*F(y) yy=[yy,y]; end //// Methode de Runge-Kutta //// function yy=rk4(y0,dt,T) eps=1e-8; y=y0;yy=y; N=floor(T/dt); for i=1:N, y1=y; y2=y+dt/2*F(y1); y3=y+dt/2*F(y2); y4=y+dt*F(y3); y=y+dt/6*(F(y1)+ 2*(F(y2)+F(y3))+F(y4)); yy=[yy,y]; end </pre>	<pre> //// Methode d'Euler implicite //// function yy=eulI(y0,dt,T) eps=1e-8; y=y0; yy=y; N=floor(T/dt); for i=1:N, y=newton(y,dt,eps); yy=[yy,y]; end //// Methode de Crank-Nicolson //// function yy=cn(y0,dt,T) eps=1e-8; y=y0; yy=y; N=floor(T/dt); for i=1:N, y=newton(y+dt/2*F(y),dt/2,eps); yy=[yy,y]; end </pre>
--	--

Les méthodes d'Euler explicite et de Runge et Kutta ne nécessitent que des évaluations de la fonction F définissant le système différentiel (1) :

```

//// Fonction F ////

function y=F(x);

a=3;b=1;p=2;q=1;
y=zeros(x);
y(1)=x(1)*(a-b*x(2));
y(2)=x(2)*(q*x(1)-p);

```

En revanche, les méthodes d'Euler implicite et Crank-Nicolson (colonne de droite ci-dessus) sont implicites; elles font appel à la méthode de Newton pour résoudre l'équation :

$$\text{phi}(x, x_0, dt) = 0$$

Les fonctions suivantes sont définies dans ce but :

```
//// Methode de Newton ////  
  
function x=newton(x0,dt,eps)  
  
err=1;  
x=x0;  
while err>eps,  
    x=x-Dphi(x,dt)\phi(x,x0,dt);  
    err=phi(x,x0,dt);  
end  
  
//// Differentielle DF ////  
  
function A=DF(x);  
  
a=3;b=1;p=2;q=1;  
A=zeros(2,2);  
A(1,1)=a-b*x(2);
```

```
A(1,2)=-b*x(1);  
A(2,1)=q*x(2);  
A(2,2)=q*x(1)-p;  
  
//// Fonction phi definissant ////  
//// l'equation a resoudre      ////  
//// par la methode de Newton ////  
  
function y=phi(x,x0,dt)  
  
y=x-dt*F(x)-x0;  
  
//// Differentielle Dphi ////  
  
function A=Dphi(x,dt);  
  
A=eye(2,2)-dt*DF(x);
```

Références

- [1] A. CHAMBERT-LOIR, S. FERMIGIER, V. MAILLOT. *Exercices de mathématiques pour l'agrégation*. Masson, Paris, second edition 1997. Analyse 3.
- [2] M. CROUZEIX, A. L. MIGNOT. *Analyse numérique des équations différentielles*. Masson, Paris 1984.
- [3] J.-P. DEMAILLY. *Analyse numérique et équations différentielles*. PUG, Grenoble 1996.
- [4] E. HAIRER, S. P. NØRSETT, G. WANNER. *Solving ordinary differential equations. I*. Springer-Verlag, Berlin, second edition 1993. Nonstiff problems.
- [5] M. W. HIRSCH, S. SMALE. *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra*. Academic Press, New York-London 1974. Pure and Applied Mathematics, Vol. 60.
- [6] J. D. MURRAY. *Mathematical biology*. Springer-Verlag, Berlin, second edition 1993.
- [7] C. ZUILY, H. QUEFFÉLEC. *Éléments d'analyse pour l'agrégation*. Masson, Paris 1995.